PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. | 1. Januar 1918. | 19. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 2. Januar 1918.

INHALT:

Originalmitteilungen:

O. Meißner, Die Jahresperiode der mikroseismischen Bewegung. S. 1.

Ph. Frank, Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik bewegter Medien und einer Aufgabe aus dem Gebiete der Flugzeugbewegung. S. 2.

E. Schrödinger, Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes. S. 4.

A. Smekal, Über die zum Beweise des Boltzmannschen Prinzips verwendete wahrscheinlichste Verteilung. S. 7.

A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. VI. S. 10.

J. E. Paulson, Zur Kenntnis des *Ni*-Spektrums. S. 13.

Besprechungen:

A. E. Haas, Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. S. 16.

Tagesereignisse. S. 16.

Personalien. S. 16.

Angebote. S. 16.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Jahresperiode der mikroseismischen Bewegung.

Von Otto Meißner.

Bereits in einer früheren Veröffentlichung in dieser Zeitschrift[1]) hatte ich die harmonischen Konstanten für die Jahresperiode der kurzperiodischen mikroseismischen Bewegung verschiedener Stationen in Nord- und Mitteleuropa gegeben. In einer demnächst in den „Annalen der Hydrographie" erscheinenden Abhandlung habe ich das gleiche für die russischen Stationen Pulkowa bei Petersburg, Taschkent und Irkutsk getan sowie eine Vergleichung mit dem Seegang in Norwegen angestellt; die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit sollen nachfolgend kurz dargestellt werden.

Für die russischen Stationen liegen zwar nur etwa zwei Jahre Beobachtungen vor, da sie erst Anfang 1912 mit modernen Erdbebeninstrumenten Galitzinschen Modells (aperiodisch gedämpfte Horizontalpendel mit galvanometrischer Registrierung) ausgerüstet wurden und seit Kriegsausbruch begreiflicherweise keine Veröffentlichungen mehr an uns gelangt sind; indes reicht dieser Zeitraum doch aus, um mit den anderen Stationen in Mitteleuropa vergleichbare Ergebnisse zu erzielen.

In der folgenden Tabelle gebe ich nun für die untersuchten Orte den Mittelwert a_0, die Amplitude a_1 und Phase φ des jährlichen Gliedes sowie das Verhältnis $a_1 : a_0$, also die relative Intensität der Jahresperiode. Für Göttingen und Pulkowa habe ich den Gang für alle drei Komponenten (E, N und V) berechnet, hier aber mich auf die Wiedergabe der Ergebnisse für die Nordkomponente beschränkt, da an beiden Stationen die anderen Komponenten bis auf $^1/_2$ Grad die gleiche Phase und ein ganz ähnliches Amplitudenverhältnis ergaben.

Die beiden letzten Zeilen der Tabelle enthalten für den Seegang in Skudesnes die entsprechenden Werte, und zwar für den nach der üblichen Skala geschätzten Seegang S selbst wie für das Quadrat S^2. Über die Berechtigung, Schätzungen nach einer doch immerhin bis zu einem gewissen Grade willkürlichen, jedenfalls nicht exakt definierten und vielleicht nicht einmal streng definierbaren Skala zu Mittelwerten zu vereinigen, habe ich in der eingangs erwähnten Arbeit ausführlicher gehandelt. Daß die Jahresperiode auch für S^2 berechnet wurde, geschah aus dem Grunde, weil es sich beim Seegang ja um Bewegungsenergie handelt. Freilich ist die Sache ziemlich verwickelt, denn einerseits nimmt die Geschwindigkeit der Wellen bei steigendem Seegang in bisher nicht genauer untersuchtem Maße zu, andererseits wird die von den Erschütterungen durch die bewegten Wassermassen direkt betroffene Festlandsfläche gleichfalls größer. Es muß daher einstweilen zweifelhaft bleiben, welche Potenz von S bei derartigen Vergleichungen am zweckmäßigsten bzw. am korrektesten zugrunde zu legen ist.

Station	Zeitraum	a_0	a_1	φ_1	$\frac{a_1}{a_0}$
Graz	1907—1915	0,20 μ	0,30 μ	17°	1,50
Göttingen N. .	(1904—1907)	0,37	0,45	16	1,22
Potsdam N. .	1913—1916	0,45	0,32	7	0,71
Hamburg . .	1909—1911	2,89	2,80	9	0,97
Upsala . . .	1907—1912	0,34	0,33	9	0,97
Pulkowa N . .	1912—1914	0,59	0,43	4	0,73
Taschkent . .	1912—1914	0,30	0,19	358	0,63
Irkutsk . . .	1912—1914	0,15	0,10	340	0,67
Seegang in Skudesnes S . .	1912—1913	2,88	0,88	347	0,31
„ „ S^2 . .	1912—1913	8,74	5,22	347	0,60

1) Diese Zeitschr. 18, 73—75, 1917.

Was nun zunächst die absolute Größe der mikroseismischen Unruhe betrifft, so nimmt sie nach unserer Tabelle nach dem Festlandsinnern hin ab; in dem küstennahen Hamburg hat sie die größten Werte, und bei dieser Station wird man eine direkte Beeinflussung durch den Seegang wohl nicht in Abrede stellen können.

Daß es sich aber bei Küsten- wie bei Festlandsstationen um eine und dieselbe Erscheinung handelt, beweisen aufs deutlichste die Phasen, die selbst im äußersten Falle nur um 30°, also einen Monat, abweichen, was bei dem Zusammenhange der mikroseismischen Bewegung mit den von Jahr zu Jahr stark veränderlichen meteorologischen Faktoren keineswegs besonders viel ist, besonders wenn man berücksichtigt, daß die der Rechnung zugrunde gelegten Zeiträume bei den einzelnen Stationen sehr verschieden sind, und daß die Phase gegen kleine Schwankungen sehr empfindlich ist.

Von großer Bedeutung für die Entscheidung der Frage nach dem Kausalzusammenhange zwischen Seegang und mikroseismischer Bewegung ist die letzte Spalte der Tabelle. Aus ihr geht hervor, daß die verhältnismäßige Größe der jährlichen Schwankung nach dem Festlandsinnern nur wenig abnimmt und selbst in Irkutsk noch größer ist als beim Seegang in Skudesnes, und sogar als bei S^2.

Die Intensität der Wirkung kann aber doch nicht größer sein als die der Ursache! Die absolute Größe der Bewegung kann nicht von entscheidender Bedeutung sein, da sie zu sehr vom Untergrunde der Station abhängt. Aber auf jeden Fall wird man es als ausgeschlossen betrachten dürfen, daß der Seegang im südlichen Norwegen seine Wirkungen bis nach Irkutsk tief im Innern von Sibirien hin erstrecken kann.

Da ich bereits in einer früheren Arbeit[1]) gezeigt habe, daß in Potsdam zur Zeit starker mikroseismischer Unruhe große Luftdruckgegensätze zwischen Nord- und Südeuropa bestehen, die bei fehlender mikroseismischer Bewegung sehr viel geringer sind, an dem einheitlichen Charakter der Erscheinung in mindestens ganz Mittel- und Nordeuropa und Nordasien aber nach der vorstehenden Tabelle nicht zu zweifeln ist, lautet das Ergebnis meiner Untersuchungen folgendermaßen:

Die jährliche Periode der mikroseismischen Bewegung von etwa 7 Sekunden Wellenperiode ist einheitlich bedingt durch die Luftdruckgegensätze zwischen Nordwesteuropa und Asien. Genauer festzustellen, in welcher Weise die Luftdruckänderungen den Erdboden auf so enorm weite Gebiete hin in regelmäßige Schwingungen zu setzen vermögen, muß späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Potsdam, 8. November 1917.

(Eingegangen 10. November 1917.)

1) Beiträge zur Geophysik **13**, 204—209.

Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik bewegter Medien und einer Aufgabe aus dem Gebiete der Flugzeugbewegung.

Von Philipp Frank.

Wenn die Aufgabe gestellt ist, ein Flugzeug in möglichst kurzer Zeit von einem Punkt A zu einem Punkt B des Raumes zu steuern, so ist klar, daß bei willkürlich vorgegebener Windverteilung diese günstigste Bahn im allgemeinen keine Gerade sein wird. Im folgenden soll nun untersucht werden, wie stark diese günstigste Bahn gekrümmt sein muß. Wenn auch diese Aufgabe praktisch von nicht sehr großer Bedeutung ist, da auf den durchfahrenen Strecken der Wind meist als räumlich konstant angesehen werden kann, so ist sie doch für den Physiker dadurch von einem gewissen Interesse, daß ihre Lösung ganz wie die eines bekannten Problems aus der Optik bewegter Medien erfolgt.

Es sei c die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges, d. h. seine durch die Kraft des Motors bei Vollgas und ruhender Luft hervorgerufene Geschwindigkeit. Wir sehen sie als konstant an, was in Wirklichkeit nur beim Flug unter konstantem Winkel mit der Vertikalen, wie etwa beim Horizontalflug, der Fall ist. Die Windverteilung sei als Funktion des Ortes, also der Koordinaten, durch das Vektorfeld $\mathfrak{w}$ nach Richtung und Stärke gegeben. Die tatsächliche Geschwindigkeit, die durch das Zusammenwirken von Eigengeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit zustande kommt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}$, ihren absoluten Betrag mit v. Wenn wir das Linienelement einer Flugbahn mit ds bezeichnen, so ist die Zeit, die das Flugzeug zum Durchlaufen eines Stückes derselben braucht, durch

$$J = \int \frac{ds}{v} \tag{1}$$

gegeben. Es ist nun die Kurve zu suchen, die J zu einem Minimum macht. Dabei muß zunächst die unbekannte Größe v durch das bekannte Vektorfeld $\mathfrak{w}$ und die bekannte Konstante c ausgedrückt werden.

Die Richtung der tatsächlichen Bewegung sei durch den Einheitsvektor $\mathfrak{s}$, die der Eigen-

geschwindigkeit durch den Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ gegeben. Dann ist offenbar

$$v\mathfrak{s} = c\mathfrak{t} + \mathfrak{w}. \qquad (2)$$

Wenn wir diese Gleichung skalar mit sich selbst multiplizieren, wird daraus

$$v^2 = c^2 + 2c(\mathfrak{w}\mathfrak{t}) + (\mathfrak{w}\mathfrak{w}).$$

Wenn wir annehmen, daß die Windstärke gegenüber der Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges so gering ist, daß die höheren Potenzen von $\frac{|\mathfrak{w}|}{c}$ vernachlässigt werden können, folgt daraus

$$\frac{v}{c} = 1 + \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\mathfrak{t}\right). \qquad (3)$$

Wenn wir den reziproken Wert nehmen und außerdem $\mathfrak{t}$ durch $\mathfrak{s}$ ersetzen, was wegen Gleichung (2) mit derselben Genauigkeit wie Gleichung (3) zulässig ist, lautet der Ausdruck Gleichung (1) für die Zeit, die das Flugzeug zum Durchlaufen einer beliebigen Bahn braucht,

$$J = \frac{1}{c}\int\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\mathfrak{s}\right)\right)ds. \qquad (4)$$

Die Extremalen dieses Integrals liefern also die günstigsten Flugbahnen.

Dasselbe Variationsproblem spielt aber bekanntlich in der Optik bewegter Medien eine Rolle. Wenn sich nämlich die Erde durch den Äther bewegt, entsteht ein „Ätherwind" relativ zur Erde, dessen Geschwindigkeit durch ein Vektorfeld $\mathfrak{w}$ gegeben sei. Die Lichtgeschwindigkeit im ruhenden Äther sei c; dann bedeutet J in Gleichung (4) offenbar die Zeit, die das Licht braucht, um eine relativ zur Erde ruhende starre Kurve zu durchlaufen. Die Extremalen bedeuten die Kurven kürzester Lichtzeit, also die tatsächlichen Lichtstrahlen relativ zur Erde, wie sie durch die Bewegung erzeugt werden. Deren Krümmung hat aber eigentlich schon Stokes[1]) und ganz explizit H. A. Lorentz[2]) berechnet, so daß wir dessen Formel hier nur anwenden müssen. Es ist nämlich der Krümmungsvektor $\mathfrak{f}$, dessen absoluter Betrag die durch den Ätherwind hervorgerufene Krümmung der Lichtstrahlen darstellt, durch

$$\mathfrak{f} = \frac{1}{c}\left[\operatorname{rot}\mathfrak{w}, \mathfrak{s}\right] \qquad (5)$$

gegeben. Dieses Gesetz gilt natürlich auch für unser Problem. Es zeigt sich also, daß die günstigste Flugbahn eine Krümmung besitzt, die im wesentlichen durch den Wirbel der Windverteilung bestimmt ist und die man für jede Stelle der Bahn aus der ursprünglichen Richtung der Bahn $\mathfrak{s}$ und dem genannten Wirbel nach Gleichung (5) berechnen kann. Insbesondere folgt, daß die geraden Bahnen immer dann die günstigsten sind, wenn die Windverteilung eine wirbelfreie ist.

Dabei ist natürlich immer vorausgesetzt, daß der Wind so schwach gegenüber der Flugzeuggeschwindigkeit ist, daß die Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{\mathfrak{w}}{c}$ zulässig ist. Um einen gewissen Anhaltspunkt dafür zu bieten, inwiefern das in praktisch vorkommenden Verhältnissen zutrifft, sollen einige Zahlenangaben dienen. Ein schnelles Flugzeug erreicht heute schon häufig eine Eigengeschwindigkeit von 50 m/sec. Damit wollen wir etwa die Windgeschwindigkeiten der verschiedenen Windstärken nach der Beaufortschen Windskala vergleichen. In dieser Skala, die in 12 Stufen vom leisesten Luftzug bis zum stärksten Orkan führt, entspricht z. B. einem „schwachen" Wind (Nr. 3) eine Windgeschwindigkeit von 4,8 m/sec, einem „starken" Wind (Nr. 6) von 10,7 m/sec. Wenn wir für die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges den genannten Wert von 50 m/sec zugrunde legen, ergibt sich für die beiden erwähnten Windstärken für den fraglichen Quotienten der Wert 0,1 bzw. 0,21. Bei einer noch größeren Windstärke hat man selten gutes Flugwetter.

Schließlich will ich hier noch eine kurze und durchsichtige Ableitung für die Formel (5) angeben. Man kann das Integral in Gleichung (4), wenn wir mit τ einen Parameter auf der Bahnkurve bezeichnen, in die Form

$$J = \frac{1}{c}\int F(x, y, z, x', y', z')\,d\tau \qquad (6)$$

bringen, wobei

$$x' = \frac{dx}{d\tau} \quad \text{usw.}$$

bedeutet. Dabei ist, wenn wir Gleichung (4) und (6) vergleichen,

$$F(x, \ldots z') = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} - \frac{1}{c}\left(x'\mathfrak{w}_x + y'\mathfrak{w}_y + z'\mathfrak{w}_z\right) \qquad (7)$$

wobei $\mathfrak{w}_x$ usw. die Komponenten von $\mathfrak{w}$ bedeuten. Die Extremalen genügen den Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

usw. Setzen wir hierin für F seinen Wert (7) ein und fassen die drei Gleichungen in eine Vektorgleichung zusammen, so erhalten wir für den tangentialen Einheitsvektor $\mathfrak{s}$ der Extremalen die Differentialgleichung

1) G. G. Stokes, Phil. Mag. **27**, 1845; Math. and phys. Papers, Bd. I, S. 134f.

2) H. A. Lorentz, Abhandlgn. über theor. Physik, I, S. 401.

$$\frac{d}{ds}\left(\mathfrak{s} - \frac{\mathfrak{w}}{c}\right) = -\frac{1}{c}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{s}), \qquad (8)$$

wobei die Operation grad sich nur auf $\mathfrak{w}$, nicht aber auf $\mathfrak{s}$ bezieht. Nun ist bekanntlich nach der Definition des Krümmungsvektors

$$\mathfrak{k} = \frac{d\mathfrak{s}}{ds}$$

also ist nach Gleichung (8)

$$\mathfrak{k} = \frac{1}{c}\frac{d\mathfrak{w}}{ds} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{s}). \qquad (9)$$

Nun gilt für zwei beliebige Vektorfelder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Identität[1])

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A}].$$

Setzen wir hierin $\mathfrak{A} = \mathfrak{w}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{s}$ und beachten, daß $\mathfrak{s}$ nicht als Funktion der Koordinaten zu betrachten ist, also durch die Operationen rot und ∇ zu Null gemacht wird, so ergibt sich

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{w}\mathfrak{s}) = (\mathfrak{s}\nabla)\mathfrak{w} + [\mathfrak{s}\operatorname{rot}\mathfrak{w}] \qquad (10)$$

Da nun nach der Bedeutung von ∇ bekanntlich

$$\frac{d\mathfrak{w}}{ds} = (\mathfrak{s}\nabla)\mathfrak{w},$$

erhalten wir aus Gleichung (9) und (10) die zu beweisende Gleichung (5).

1) Siehe z. B. W. v. Ignatowsky, Die Vektoranalysis, Bd. I, Gl. 68.

Prag, 7. November 1917.

(Eingegangen 10. November 1917.)

Die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes.

Von Erwin Schrödinger.

(Aus dem II. physikalischen Institut der k. k. Universität Wien.)

1. In der Gravitationstheorie der allgemeinen Relativität spielen — insbesondere für die Art der Einführung des Energietensors der Materie in die Feldgleichungen — eine ausschlaggebende Rolle die 16 Größen t_σ^α, welche Einstein als Energiekomponenten des Gravitationsfeldes bezeichnet[1]). Bedient man sich eines Koordinatensystems, für welches

$$\sqrt{-g} = 1, \qquad (1)$$

so erhält man für die t_σ^α die verhältnismäßig einfachen Ausdrücke

$$\varkappa t_\sigma^\alpha = \frac{1}{2}\delta_\sigma^\alpha g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\beta - g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\sigma}^\beta, \qquad (2)$$

wobei — wie im folgenden stets, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt — über zweimal auftretende allgemeine Indizes von 1 bis 4 zu summieren ist. — Zeichenerklärung:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = -g^{\lambda\beta}\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \beta\end{bmatrix} = -\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\left[\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right]; \qquad (3)$$

die $g_{\mu\nu}$ sind in gewohnter Weise durch den Ausdruck für das Quadrat des (vierdimensionalen) Linienelements definiert:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu;\quad g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu},\quad g = \text{Det. der } g_{\mu\nu}. \qquad (4)$$

Die $g^{\mu\nu}$ sind die adjungierten, normierten Unterdeterminanten 1. Ordnung im Schema der $g_{\mu\nu}$. Endlich ist

$$\delta_\sigma^\alpha = g_{\mu\sigma}g^{\mu\alpha} = \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\Big\}\text{ für }\Big\{\begin{matrix}\sigma \neq \alpha\\ \sigma = \alpha\end{matrix} \qquad (5)$$

und $\varkappa$ (im wesentlichen) die Gravitationskonstante.

Den Gegenstand dieser Mitteilung bildet die explizite Berechnung der Größen t_σ^α in der Umgebung einer ruhenden Kugel aus inkompressibler, gravitierender Flüssigkeit. Die Rechnung wird auf Grund der von Schwarzschild[1]) ermittelten Werte der $g_{\mu\nu}$ exakt durchgeführt für ein räumliches Koordinatensystem, das sich von einem rechtwinkligen kartesischen nur äußerst wenig unterscheidet, ja vielleicht geradezu als ein solches bezeichnet werden könnte. — Man muß bei jeder Berechnung der t_σ^α die Angabe des Koordinatensystems hinzufügen, denn diese Größen bilden keinen Tensor; sie verschwinden beispielsweise nicht in allen Systemen, wenn sie es bei bestimmter Koordinatenwahl tun. Das Ergebnis, zu dem man in diesem speziellen Fall gelangt — exaktes, identisches Verschwinden aller t_σ^α in dem gewählten Bezugssystem — scheint mir gleichwohl so befremdend, daß ich glaube, es zur allgemeinen Diskussion stellen zu sollen.

2. Schwarzschild findet l. c. für das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = (1 - \alpha/R)\,dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} - R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) \qquad (6)$$

mit der Abkürzung

$$R = (r^3 + \varrho)^{1/3}. \qquad (7)$$

r, ϑ, φ, t sind gewöhnliche Polarkoordinaten und Zeit, α und ϱ sind Integrationskonstanten, welche von der Dichte und dem Radius der gravitierenden Kugel abhängen und in Wirklichkeit immer außerordentlich klein sind gegen alle in Betracht kommenden Werte von r bzw. r^3

1) A. Einstein, Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (J. A. Barth 1916), S. 45 ff.

1) Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, S. 424.

In (6) führen wir neue Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 ein durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin \vartheta \cos \varphi \\ x_2 &= R \sin \vartheta \sin \varphi \\ x_3 &= R \cos \vartheta \\ x_4 &= t. \end{aligned} \tag{8}$$

Hieraus ergibt sich in bekannter Weise:

$$R^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2, \tag{9}$$

ferner

$$dt = dx_4$$

$$dR^2 = \frac{x_\mu x_\nu}{R^2} dx_\mu dx_\nu$$

$$\begin{aligned} R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) &= dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 - dR^2 \\ &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{R^2}\right) dx_\mu dx_\nu \end{aligned} \tag{10}$$

$$\left[\mu, \nu = 1, 2, 3;\ \delta_{\mu\nu} \overset{=0}{\underset{=1}{}} \text{ für } \mu \overset{\neq}{\underset{=}{}} \nu\right].$$

(Hier verwenden wir unsere Summationssymbolik vorübergehend etwas inkonsequent für Summen, die nur von 1—3 laufen!)

Indem man (10) in (6) einsetzt, erhält man das Linienelement in den neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} ds^2 = (1 - \alpha/R)\, dx_4{}^2 - \\ - \left[\delta_{\mu\nu} + \frac{\alpha x_\mu x_\nu}{R^3(1-\alpha/R)}\right] dx_\mu dx_\nu, \end{aligned} \tag{11}$$

woraus man nach (4) abliest:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= -\left[\delta_{\mu\nu} + \frac{\alpha x_\mu x_\nu}{R^3(1-\alpha/R)}\right] \text{ für } \mu, \nu = 1, 2, 3. \\ g_{14} &= g_{24} = g_{34} = 0 \qquad g_{44} = 1 - \alpha/R. \end{aligned} \tag{12}$$

Der Buchstabe R hat hier und weiterhin als Abkürzung zu gelten für

$$R = + \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2}. \tag{13}$$

Um zur Berechnung der t_σ^α die Gleichungen (2) und (3) anwenden zu dürfen, müssen wir vor allem zeigen, daß das gewählte Bezugsystem der Bedingung (1) genügt. Zunächst erhält man auf einer Koordinatenachse, etwa auf der x_1-Achse ($x_2 = x_3 = 0$), für den Fundamentaltensor (12) das einfache Schema:

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} -\frac{R}{R-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R-\alpha}{R} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Für den späteren Gebrauch notieren wir sogleich auch das Schema des kontravarianten Fundamentaltensors in einem Punkt der x_1-Achse

$$g^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} -\frac{R-\alpha}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{R}{R-\alpha} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Aus (14) folgt in Anbetracht der Kugelsymmetrie des Feldes, daß Gleichung (1) überall erfüllt ist; denn jeder beliebige Punkt läßt sich in die x_1-Achse verlegen durch eine Transformation von der Determinante $+1$ (räumliche Drehung). (2) und (3) sind also anwendbar.

Die eben genannte Transformation ist bekanntlich eine lineare. Gegenüber linearen Transformationen besitzen aber die Größen t_σ^α Tensorkovarianz (was leicht zu zeigen ist) — jedenfalls also linear homogene Transformationsformeln. Deshalb wird es genügen, auch diese Größen nur in einem beliebigen Punkt der x_1-Achse zu berechnen, (wodurch sich die Rechnung ungeheuer vereinfacht). Denn da sich zeigen wird, daß sie in einem solchen Punkt sämtlich verschwinden, werden wir schließen dürfen, daß sie überall identisch verschwinden.

Aus (12) erkennt man leicht, daß für einen Punkt der x_1-Achse von den 40 Größen $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ nur einige wenige von 0 verschieden sind. Für diese gibt eine leichte Rechnung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} &= \frac{\alpha}{(R-\alpha)^2} \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} &= \frac{\partial g_{13}}{\partial x_3} = -\frac{\alpha}{R(R-\alpha)} \\ \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} &= \frac{\alpha}{R^2} \\ \text{Alle anderen } &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Für die $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ ergibt sich zunächst aus (3) und (15)

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= -(g^{\lambda\lambda})\begin{bmatrix}\mu\nu \\ \lambda\end{bmatrix} = \\ &- \frac{1}{2}(g^{\lambda\lambda})\left[\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right]. \end{aligned} \tag{18}$$

(Daß über den Index λ nicht zu summieren ist, mag durch die runde Klammer angedeutet sein!) Wir haben also die 40 Größen $\begin{bmatrix}\mu\nu \\ \lambda\end{bmatrix}$ daraufhin zu durchmustern, welche von ihnen auf Grund von (17) nicht verschwinden.

A. μ, ν, λ „räumlich" (d. i. $= 1, 2, 3$).

1. $\mu \neq \nu$.

a) $\mu \neq \lambda \neq \nu$. (3 Größen). Verschwinden,

da unter (17) keine Größe mit drei verschiedenen Indizes auftritt.

b) $\lambda = \mu$. (6 Größen).

$$\left(\begin{bmatrix}\mu\nu\\ \mu\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\nu}\right).$$

Verschwinden, da sich unter (17) keine Größen dieser Art mit nur räumlichen Indizes vorfinden.

2. $\mu = \nu$.

a) $\lambda \neq \mu$. (6 Größen).

$$\left(\begin{bmatrix}\mu\mu\\ \lambda\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\mu}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\lambda}\right).$$

Von o verschieden, wenn $\lambda = 1$, $\mu = 2, 3$ und zwar:

$$\begin{bmatrix}22\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}33\\ 1\end{bmatrix} = -\frac{\alpha}{R(R-\alpha)}.$$

b) $\lambda = \mu$. (3 Größen).

$$\left(\begin{bmatrix}\mu\mu\\ \mu\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x_\mu}\right).$$

Von o verschieden für $\mu = 1$, und zwar:

$$\begin{bmatrix}11\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{(R-\alpha)^2}.$$

B. Ein Index gleich 4. ($6+9=15$ Größen).

In jedem Term wird entweder nach x_4, oder es wird eine der Größen g_{14}, g_{24}, g_{34} differentiiert. Daher verschwinden diese 15 Größen.

C. Zwei Indizes gleich 4. ($3+3=6$ Größen).

Von o verschieden sind offenbar nur

$$\begin{bmatrix}41\\ 4\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}44\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{R^2}.$$

D. Alle drei Indizes gleich 4. (1 Größe).

Verschwindet. —

Auf Grund dieser Durchmusterung findet man aus (18) mit Rücksicht auf (15):

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= \Gamma^1_{33} = -\frac{\alpha}{R^2} \\ \Gamma^1_{11} &= -\Gamma^4_{41} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{R(R-\alpha)} \\ \Gamma^1_{44} &= -\frac{1}{2}\frac{\alpha(R-\alpha)}{R^3} \\ &\text{Alle anderen} = 0. - \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Die Ausdrücke (2), die wir jetzt zu bilden haben, lassen sich mit der Abkürzung

$$A^\alpha_\sigma = g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\sigma} \quad (20)$$

folgendermaßen schreiben:

$$\varkappa t^\alpha_\sigma = \frac{1}{2}\delta^\alpha_\sigma A^\lambda_\lambda - A^\alpha_\sigma. \quad (21)$$

Wir berechnen A^α_σ. Wegen (15) verschwinden in (20) alle Terme mit $\mu \neq \nu$. Schreiben wir etwas ausführlicher:

$$A^\alpha_\sigma = g^{11}\Gamma^\alpha_{1\beta}\Gamma^\beta_{1\sigma} + g^{22}\Gamma^\alpha_{2\beta}\Gamma^\beta_{2\sigma} + g^{33}\Gamma^\alpha_{3\beta}\Gamma^\beta_{3\sigma} + g^{44}\Gamma^\alpha_{4\beta}\Gamma^\beta_{4\sigma}, \quad (22)$$

so erkennt man, daß auch die im 2. und 3. Term zusammengefaßten Glieder wegen (19) einzeln verschwinden, und zwar wenn $\beta = 2$ bzw. $= 3$ wegen des dritten, sonst wegen des zweiten Faktors. Bleibt

$$A^\alpha_\sigma = g^{11}\Gamma^\alpha_{1\beta}\Gamma^\beta_{1\sigma} + g^{44}\Gamma^\alpha_{4\beta}\Gamma^\beta_{4\sigma}. \quad (23)$$

Hieraus erkennt man sofort, daß alle jene A^α_σ verschwinden, welche den Index 2 oder 3 enthalten. Es bleiben also nur noch zu untersuchen:

$$A^1_1,\ A^1_4,\ A^4_1,\ A^4_4. \quad (24)$$

In den betreffenden Ausdrücken fallen noch alle jene Glieder fort, in denen $\beta = 2, 3$, ferner jene, in denen eine Γ-Größe den Index 4 einmal oder dreimal enthält. Daraus folgt einmal

$$A^4_1 = A^1_4 = 0. \quad (25)$$

Endlich berechnet man explizite aus (23), (19) und (15):

$$\left.\begin{aligned} A^1_1 &= g^{11}(\Gamma^1_{11})^2 + g^{44}\Gamma^1_{44}\Gamma^4_{41} \\ A^4_4 &= g^{11}(\Gamma^4_{14})^2 + g^{44}\Gamma^4_{41}\Gamma^1_{44} \end{aligned}\right\} = \quad (26)$$

$$= -\frac{R-\alpha}{R}\cdot\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{R^2(R-\alpha)^2} + \frac{R}{R-\alpha}\cdot\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{R^4} = 0.$$

Auf der x_1-Achse verschwinden also alle Größen A^α_σ identisch in $R\,(=x_1)$. Wegen (21) gilt dasselbe von den t^α_σ. Wie oben vorausgreifend bemerkt, folgt daraus, wegen der Kovarianz dieser Größen bei linearen Transformationen und wegen der Kugelsymmetrie des Feldes, daß die t^α_σ für das gewählte Bezugsystem überall (außerhalb der gravitierenden Kugel) identisch in allen Koordinaten verschwinden. W. z. b. w.

3. Dieses Ergebnis scheint mir unter allen Umständen von ziemlicher Bedeutung für unsere Auffassung von der physikalischen Natur des Gravitationsfeldes. Denn entweder müssen wir darauf verzichten, in den durch die Gleichungen (2) definierten t^α_σ die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes zu erblicken; damit würde aber zunächst auch die Bedeutung der „Erhaltungssätze" (s. A. Einstein l. c.) fallen und die Aufgabe erwachsen, diesen integrierenden Bestandteil der Fundamente neuerdings sicher zu stellen. — Halten wir jedoch an den Ausdrücken

(2) fest, dann lehrt unsere Rechnung, daß es wirkliche Gravitationsfelder (d. i. Felder, die sich nicht „wegtransformieren" lassen) gibt, mit durchaus verschwindenden oder richtiger gesagt „wegtransformierbaren" Energiekomponenten; Felder, in denen nicht nur Bewegungsgröße und Energiestrom, sondern auch die Energiedichte und die Analoga der Maxwellschen Spannungen durch geeignete Wahl des Koordinatensystems für endliche Bezirke zum Verschwinden gebracht werden können.

(Eingegangen 22. November 1917.)

Über die zum Beweise des Boltzmannschen Prinzips verwendete „wahrscheinlichste" Verteilung.

Von Adolf Smekal.

Die neuere statistische Thermodynamik hat den Nutzen der Boltzmannschen Entropie-Wahrscheinlichkeits-Relation

$$S = \varkappa \log W \qquad (1)$$

anerkennend, diese Gleichung vielfach als „Boltzmannsches Prinzip" an die Spitze ihrer Überlegungen gestellt, ohne eigens danach zu fragen, ob sie auch auf Grund der bei den betreffenden Fällen gemachten Voraussetzungen bewiesen werden kann. Da außerdem auch die Grundlagen des Boltzmannschen Beweises von (1) durch den Nachweis der Unzulässigkeit der Ergodenhypothese erschüttert sind, so hat sich P. Ehrenfest[1]) die Frage vorgelegt, unter welchen allgemeinen Voraussetzungen die Gleichung (1) gültig ist. Mit Heranziehung einer von demselben Autor eingeführten Terminologie[2]) läßt sich diese Frage auch so formulieren: Unter welchen Umständen ist die Wahrscheinlichkeit W eine adiabatische Invariante?

Die von Ehrenfest ausgeführte Verallgemeinerung besteht darin, daß er nicht wie Boltzmann jedem Punkte des μ-Raumes (Phasenraum für das Teilsystem, bzw. Molekül) „gleiches Gewicht"

$$G(q_i, p_i) = \text{const} \qquad (2)$$

zuschreibt, sondern die allgemeinere Gewichtswahl

$$G(q_i, p_i, a) \qquad (3)$$

einführt. Darin repräsentiert a eine beliebige Anzahl von willkürlichen, voneinander unabhängigen Parametern; q_i und p_i sind die generalisierten Koordinaten und Impulse des mechanischen Systems.

Um die gesuchte Verteilung der Teilsysteme im μ-Raume als „wahrscheinlichste" Verteilung charakterisieren zu können, bedient sich Ehrenfest desselben Weges, den P. Debye[1]) zur Ableitung der kanonischen Verteilung (der Name bezieht sich eigentlich auf die formal übereinstimmende Verteilung im γ-Raum) auf Grund der Boltzmannschen Annahme (2) benutzt hat. Die Verteilung die er erhält, kann auch formal in den γ-Raum übertragen gedacht werden und ist in diesem Sinne als Verallgemeinerung der kanonischen Verteilung zu bezeichnen, in die sie für

$$G = 1$$

in der Tat übergeht.

Allein es bleibt noch ein Punkt zu erwähnen übrig, der von wesentlicher Bedeutung zu sein scheint und der trotzdem mit der Boltzmannschen Gewichtswahl in Widerspruch steht. Wenn nach Ehrenfest

$$G\, dq_1 \ldots\ldots dq_r\, dp_1 \ldots\ldots dp_r = G\, d\tau$$

die „Wahrscheinlichkeit a priori" dafür ist, daß die Phase eines individuellen Teilsystems im Volumelement des μ-Raumes liegt, so müßte man die Forderung erheben

$$\int G\, d\tau = 1\,, \qquad (4)$$

wobei das Integral über den ganzen unendlichen μ-Raum zu erstrecken ist. Für die Boltzmannsche Gewichtswahl und ebenso für die übrigen in der Literatur behandelten Verallgemeinerungen divergiert aber dieses Integral[2]). Dieser Widerspruch dürfte seine Erklärung darin finden, daß die bei der Ableitung verwendeten Grenzübergänge mit (4) nicht verträglich sind, verteilt man doch zunächst eine endliche, wenn auch sehr große Anzahl N von Teilsystemen über ∞^{2n} zunächst als endlich angenommene Elementargebiete $d\tau$[3]), ersetzt aber dann nachträglich die Summen durch Integrale über den ganzen unendlichen μ-Raum, von denen man natürlich verlangt, daß sie existieren sollen! Man wird also, im Gegensatz zu Ehrenfest, die Bedingung (4) nicht als bindend ansehen können, um so mehr als sich weiter unten noch ein anderer, mehr physikalischer Grund dagegen wird namhaft machen lassen.

Die von Ehrenfest erhaltene Verteilungsfunktion ist in seiner Bezeichnungsweise (l. c.).

$$f = N\,\frac{e^{-\mu\varepsilon} G}{\int d\tau\, e^{-\mu\varepsilon} G}\,. \qquad (5)$$

Setzt man

$$Z(E, a) = \int d\tau\, e^{-\mu\varepsilon} G = e^{-\mu\psi},$$

$$\mu = \frac{1}{\Theta}$$

1) P. Ehrenfest, diese Zeitschr. 15, 657, 1914.
2) P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 51, 327, 1916.

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 33, 441, 1910, § 1.
2) P. Ehrenfest, l. c. § 6.
3) Indem man sich die Teilsysteme „kontinuierlich in der Phase verteilt denkt" (Gibbs).

und integriert über den unendlichen μ-Raum, so folgt

$$\int G e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta}} d\tau = 1. \qquad (6)$$

Aus dieser Form der Ehrenfestschen Verteilung ist der früher erwähnte formale Zusammenhang mit der kanonischen Verteilung des γ-Raumes direkt ersichtlich. Damit eine derart verteilte Gesamtheit sich in statistischem Gleichgewichte befindet, muß G eine Funktion der zeitfreien Integrale des Teilsystems sein.

Indem man die Gibbssche[1]) Betrachtungsweise auf die Verteilung (6) anwendet[2]), gelangt man ähnlich wie Ehrenfest zur „δG-Bedingung". Denkt man sich nämlich die Werte der Gesamtenergie E und der Parameter a geändert und die Gesamtheit, ihren neuen Werten entsprechend, gemäß (6) verteilt, so erhält man durch Differentiation der Gleichung

$$e^{-\frac{\psi}{\Theta}} = \int G e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau$$

die folgende

$$e^{-\frac{\psi}{\Theta}}\left(-\frac{1}{\Theta}d\psi + \frac{\psi}{\Theta^2}d\Theta\right)$$

$$= \frac{1}{\Theta^2} d\Theta \int G \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau$$

$$- \frac{1}{\Theta} da \int G \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau$$

$$+ \quad da \int \frac{\partial G}{\partial a} e^{-\frac{\varepsilon}{\Theta}} d\tau.$$

Nun ist die Mittelwertsdefinition in der Ehrenfestschen Verteilung für irgendeine Phasenfunktion u

$$\bar{u} = \int G u e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta}} d\tau. \qquad (7)$$

Wenn die kinetische Energie von den a unabhängig ist, wie auch Gibbs und Ehrenfest voraussetzen, so ist

$$A = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial a}$$

die Kraft, welche das Teilsystem in der Richtung von a ausübt. Multipliziert man die früher erhaltene Gleichung mit $\Theta e^{\frac{\psi}{\Theta}}$ und berücksichtigt (7), so erhält man

$$d\psi = \frac{\psi}{\Theta} d\Theta - \frac{\bar{\varepsilon}}{\Theta} d\Theta - \bar{A}\, da - \Theta \overline{\frac{\partial \log G}{\partial a}}\, da.$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn man die Bezeichnung

$$\eta = \frac{\varepsilon - \psi}{\Theta}$$

einführt, auf die Form bringen

$$d\bar{\eta} = \frac{d\bar{\varepsilon} + \bar{A}\, da}{\Theta} + \overline{\frac{\partial \log G}{\partial a}}\, da. \qquad (8)$$

Um diese Gleichung, abgesehen von den Durchschnittszeichen, mit der thermodynamischen Entropiegleichung identisch zu machen, muß man

$$\overline{\frac{\partial \log G}{\partial a}} = 0$$

oder

$$\int \delta G e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta}} d\tau = 0 \qquad (9)$$

setzen, was, wie bei Ehrenfest, unmittelbar auf die „δG-Bedingung" führt.

Man kann also das Ehrenfestsche Resultat in folgender Weise aussprechen: Die δG-Bedingung ist notwendig und hinreichend dafür, daß die erste Gibbssche Entropiedefinition in der „verallgemeinerten kanonischen Gesamtheit" (6) (für das Teilsystem) existiert und bis auf einen konstanten Faktor ($\varkappa N$) mit der Boltzmannschen Entropiedefinition (1) zusammenfällt. Dann ist also Θ integrierender Nenner von δQ, hingegen wird dem Mittelwerte der kinetischen Energie diese Eigenschaft jetzt im allgemeinen nicht mehr zukommen.

Wie steht es nun mit den anderen beiden Gibbsschen Entropiedefinitionen[1]), sofern sie sich überhaupt auf die Ehrenfestsche Verteilung (6) erweitern lassen? Man kann zeigen, daß dies möglich ist, wenn G eine Funktion von ε (und den a) allein ist; dieser Fall spielt auch bei Ehrenfest eine ausgezeichnete Rolle. Doch wird man nicht verkennen, daß diese Voraussetzung eine sehr beträchtliche Einschränkung der Allgemeinheit zur Folge hat; denn sie bedeutet, daß G längs der „Energieflächen" konstant ist, daß sich also eine derartig spezialisierte Verteilung (6) gleich der kanonischen Verteilung aus mikrokanonischen Verteilungen zusammensetzen läßt. Eine weitere wesentliche Voraussetzung, die aber im Charakter der zweiten und dritten Gibbsschen Entropiedefinition

1) J. W. Gibbs, Elementary principles in statistical mechanics. New-York 1902, deutsch von E. Zermelo, Leipzig 1905, IV. Kapitel, S. 42/43.

2) Dadurch übernimmt der μ-Raum die Rolle eines γ-Raumes und das Teilsystem die Rolle eines Totalsystems. Die Energiebedingung wird aber wegen $E = N\bar{\varepsilon}$ nicht verletzt und auch die übrigen Mittelwerte des wirklichen Totalsystems sind gleich den N-fachen Mittelwerten eines Teilsystems bei der obigen Betrachtungsweise (vgl. (5), wo N als Faktor auftritt).

1) Bezüglich der kanonischen Verteilung ist die Stellung der Gibbsschen Entropiedefinitionen zum Boltzmannschen Prinzip eingehend von M. Planck, Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, S. 113 besprochen worden.

begründet ist, besteht darin, daß das Teilsystem sehr viele Freiheitsgrade haben muß[1]).

Setzt man

$$\Gamma = \log G(\varepsilon, a)$$

$$V = \int_{V=0}^{\varepsilon} d\tau \quad ^{2)}$$

$$\Phi = \log \frac{\partial V}{\partial \varepsilon}$$

so ist

$$d\tau = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \qquad (10)$$

und die Definitionsgleichung der Verteilung (6) lautet nun

$$\int_{V=0}^{\varepsilon=\infty} e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta} + \Gamma + \Phi} d\varepsilon = 1. \qquad (11)$$

Ersetzt man hierin noch $\Gamma + \Phi$ durch Φ', so hat man der Form nach genau jene Gleichung erhalten, von der Gibbs ausgeht[3]), um die kanonischen Mittelwerte der reinen Energiefunktionen zu berechnen, die jetzt durch

$$\overline{u} = \int_{V=0}^{\varepsilon=\infty} e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta} + \Phi'} u(\varepsilon) d\varepsilon \qquad (12)$$

definiert sind.

Nun ist identisch, ähnlich wie bei Gibbs,

$$\overline{\frac{du}{d\varepsilon}} - \frac{\overline{u}}{\Theta} + \overline{u \frac{d\Phi'}{d\varepsilon}} = \left| u e^{\frac{\psi-\varepsilon}{\Theta} + \Phi'} \right|_{V=0}^{\varepsilon=\infty} \qquad (13)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet für

$$u = 1$$

und

$$u = e^{-\Phi'} \int e^{\Phi'} d\varepsilon ,$$

also ergeben sich die beiden Mittelwerte

$$\overline{\frac{d\Phi'}{d\varepsilon}} = \frac{1}{\Theta} \qquad (14)$$

und

$$\overline{e^{-\Phi'} \int e^{\Phi'} d\varepsilon} = \Theta. \qquad (15)$$

Für $\Gamma = 0$, also $\Phi' = \Phi$, gehen (14) und (15) in jene beiden kanonischen Mittelwertsgleichungen über, aus denen Gibbs seine zweite und dritte Entropiedefinition für das „häufige" System deduziert. Für sehr viele Freiheitsgrade werden diese Entropiedefinitionen bekanntlich äquivalent. Indem man ähnliche Überlegungen wie Gibbs anstellt, erhält man aus (14) und (15) für die Entropie des „häufigsten" Teilsystems im μ-Raum,

$$S_2 = \Phi' = \log\left(G \frac{\partial V}{\partial \varepsilon^*}\right) \qquad (16)$$

und

$$S_3 = \log \int e^{\Phi'} d\varepsilon = \log \int_{V=0}^{\varepsilon=\varepsilon^*} G \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} d\varepsilon . \qquad (17)$$

ε^* ist die Energie des „häufigsten" Teilsystems. Auch diese Formeln gehen, wie es ja nicht anders sein kann, für $G = 1$ in die entsprechenden kanonischen über. Sie gelten, wie dies übrigens auch von der Boltzmannschen und der ersten Gibbschen Entropiedefinition gilt, nur mit einer gewissen Annäherung.

Man überzeugt sich nun leicht, welche unmittelbare thermodynamische Bedeutung der „δG-Bedingung" zukommt. Infolge (10) kann man S_3 auch die Form geben

$$S_3 = \log \int_{V=0}^{\varepsilon=\varepsilon^*} G\, d\tau .$$

Die „δG-Bedingung" verlangt, daß das Integral

$$\int \delta G\, d\tau ,$$

zwischen zwei beliebigen Energiegrenzen integriert, verschwindet. Indem man als untere Grenze die dem Werte $V = 0$ entsprechende Energie und als obere Grenze ε^* nimmt, findet man also: Die „δG-Bedingung" besagt, daß sich die auf Grund der gemachten Annahmen erweiterte dritte Gibbssche Entropiedefinition gegen jede Veränderung der Parameter a in G invariant verhält. Sie reicht aber nicht dazu aus, um S_3 zu einer adiabatischen Invariante zu machen, vielmehr würde das eine weitere Bedingung für die Funktion G bedeuten.

Hingegen scheint die „δG-Bedingung" in keinerlei Beziehung zu S_2 zu stehen, so daß S_3 in diesem Sinne als gegen S_2 ausgezeichnet angesehen werden kann. Eine gewisse Bevorzugung von S_3 gesteht auch Gibbs in der Theorie der kanonischen, bzw. mikrokanonischen Gesamtheit zu, ebenso würde darauf der direkte Nachweis Ornsteins hindeuten[1]), daß für die Boltzmannsche Gewichtswahl die Größe $\log W$ für den häufigsten Zustand und sehr viele Freiheitsgrade, abgesehen von einer Konstanten mit $\log V$ übereinstimmt.

Aus (18) entnimmt man jetzt auch die Bedeutung der von Ehrenfest geforderten Bedingung (4). Das in (4) auftretende Integral ist über den ganzen unendlichen μ-Raum zu

1) Für Moleküle trifft diese Voraussetzung natürlich nicht zu und damit kommt auch das Weitere für die Quantentheorie kaum in Betracht. Aber sie beeinflußt nicht die Anwendbarkeit des Boltzmannschen Prinzips und ermöglicht wenigstens in begrifflich einwandfreier Weise die Unzulässigkeit von (4) nachzuweisen. Im γ-Raum, wo die Betrachtung mit formal ganz übereinstimmenden Formeln erfolgt, wird sie natürlich immer gemacht.

2) Ehrenfest bezeichnet diese Größe im μ-Raum mit i.

3) J. W. Gibbs, l. c. IX. Kapitel, Gl. (318).

1) L. S. Ornstein, Proc. Amsterdam **14**, 840, 1912.

erstrecken, also unter den jetzigen Voraussetzungen bis $\varepsilon^* = \infty$. Die Bedingung (4) würde also nach (18) bedeuten: Für $\varepsilon = \infty$ hat die Entropie der Teilsysteme und damit auch die des Gesamtsystems einen universellen Wert, nämlich Null. Divergiert hingegen das Integral

$$\int_{v=0}^{\varepsilon=\infty} G\,d\tau,$$

so werden Energie und Entropie zugleich unendlich. Man sieht, welche Stellung diese Überlegungen zum Nernstschen Wärmetheorem einnehmen würden. Die Gleichung (4) kann also nicht als bindend angesehen werden.

Herrn Professor Ehrenfest bin ich für einige kritische Bemerkungen, die die Darstellung beeinflußt haben, zu großem Danke verpflichtet.

Berlin, Oktober 1917.

(Eingegangen 3. November 1917.)

Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

VI.

Elektromotorische Kräfte in langsam veränderlichen Feldern. Stellungnahme zu der Ampèreschen Theorie des Magnetismus.

Die ponderomotorischen Kräfte, welche wir bisher betrachtet haben, sind zwar auch Kräfte, welche zunächst lediglich auf die elektrischen Teilchen ausgeübt werden und sich erst dadurch auf die ponderablen Teilchen übertragen, daß wir in jedem Körper außer den elektrischen Teilchen ponderable Teilchen annehmen, deren sichtbare Geschwindigkeiten mit den Mittelwerten der sichtbaren Geschwindigkeiten der elektrischen Teilchen übereinstimmen sollen; es können sich nun aber auch Kräfte auf elektrische Teilchen in Leitern von solcher Art ergeben, daß dieselben für positive und negative Teilchen nicht gleich sind; nur die Mittelwerte dieser Kräfte sind als ponderomotorische Kräfte zu bezeichnen, und die negativen Teilchen werden in einem solchen Falle in Leitern sich in anderer Weise bewegen wie die positiven, d. h. in einem solchen Falle wird eine elektrische Strömung eintreten, und wir werden aus diesem Grunde dann von dem Auftreten elektromotorischer Kräfte sprechen.

Wie in allen anderen bisherigen Theorien wird natürlich bei der Berechnung der elektrischen Strömungen in Leitern, welche infolge solcher elektromotorischen Kräfte entstehen, die zu Wärmeerscheinungen Anlaß gebende Reibung zu berücksichtigen sein, die wir aber nicht, wie frühere Theorien, als einfache Erfahrungstatsachen hinnehmen dürfen, sondern erst gleichfalls mechanisch zu erklären haben werden. Ich werde für diese Erklärung die Theorie der „universellen Schwingungen" zu Hilfe nehmen, welche erst in der folgenden Abhandlung besprochen werden soll; darum werden wir uns in dieser Abhandlung darauf zu beschränken haben, lediglich die infolge des Feldes auftretenden elektromotorischen Kräfte, und zwar zunächst bei langsam veränderlichen Feldern, zu berechnen, und erst nach Grundlegung der Reibungstheorie in einer späteren Abhandlung aus den elektromotorischen Kräften die elektrischen Strömungen in Leitern wirklich bestimmen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit langsam veränderlichen Feldern in dem Sinne, daß wir zwar jetzt nicht mehr im allgemeinen die Mittelwerte der u_0, v_0, w_0 als verschwindend klein und alle Mittelwerte von der Zeit t unabhängig annehmen, daß wir aber die absoluten Werte der u_0, v_0, w_0 und der Differentialquotienten der das Feld bestimmenden Funktionen unterhalb gewisser oberer Grenzen voraussetzen, so daß wir nach der Methode der sukzessiven Annäherungen in Reihenentwicklungen nach diesen Größen für zweite Annäherungen nur die ersten Potenzen dieser Größen zu berücksichtigen brauchen.

Für die ponderomotorischen Kräfte, welche wir in den beiden vorangehenden Abhandlungen betrachtet haben, gibt die Berücksichtigung sichtbarer Geschwindigkeiten u_0, v_0, w_0 wenn dieselben etwa von der Größenordnung gewöhnlicher irdischer Translationsgeschwindigkeiten sind, wenn wir mit ε eine Dichte von der Größenordnung der gewöhnlichen ponderablen Dichten bezeichnen und dann bedenken, daß in solchen Fällen die Größen

$$\varepsilon(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2),\ \mu(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2),$$
$$\mu(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)$$

etwa von derselben Größenordnung sein werden, nur Korrekturglieder, welche gegen die ponderomotorischen Kräfte im stationären Falle von der Ordnung $\frac{\mu}{\varepsilon}$ klein sind. Also nur, wenn die sichtbaren Geschwindigkeiten außerordentlich große Werte erreichen, und ebenfalls, wenn die Differentialquotienten der das Feld bestimmenden Funktionen nach der Zeit große Werte

haben, wird eine Korrektur der ersten, für den stationären Fall bestimmten Annäherungen notwendig sein.

Anders liegt es bei der Bestimmung der elektromotorischen Kräfte; solche treten im stationären Falle überhaupt nicht auf, die ersten Annäherungen sind also null, und wir müssen für eine zweite Annäherung die u_0, v_0, w_0 und die zeitlichen Veränderungen der das Feld bestimmenden Funktionen berücksichtigen. Allerdings ergibt sich, wie bereits bemerkt, daß in den Formeln für die infolge des Feldes auf einen Körper τ wirkenden Kräfte[1]):

$$X_0 = \frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau \Big\{ u_1 \theta_1 - \Big[v_1\Big(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\Big) - w_1\Big(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\Big)\Big]\Big\} d\tau \qquad (1)$$
$$- \frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau \Big\{ v_2\Big(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big) - w_2\Big(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\Big)\Big\} d\tau, ..$$

die Berücksichtigung der sichtbaren Bewegungen und der zeitlichen Veränderungen der das Feld bestimmenden Funktionen Korrekturglieder nicht hinzugefügt werden brauchen, weil diese von der Ordnung $\frac{\mu}{\varepsilon}$ klein sein würden, wohl muß man aber jetzt bei der Bestimmung der Funktionen

$$u_1, v_1, w_1; \; u_2, v_2, w_2$$

selbst, aus den Gleichungen des elektromagnetischen Feldes[2]):

$$u_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{c}\Big\{\frac{\overline{dU}}{dt} + \frac{\partial u_0}{\partial x}U + \frac{\partial v_0}{\partial x}V + \frac{\partial w_0}{\partial x}W\Big\}, ..,$$
$$u_2 = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \ldots, \qquad (2)$$

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\overline{d^2\psi}}{dt^2} = -\theta_1,$$
$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\overline{d^2 U}}{dt^2} = -\frac{1}{c}u_0\theta_1 \qquad (3)$$
$$+ \frac{1}{c^2}\Big\{\Big(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}\Big)\frac{\overline{dV}}{dt} - \Big(\frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\Big)\frac{\overline{dW}}{dt}\Big\}, ..$$

die ersten Potenzen der u_0, v_0, w_0, ihrer Ableitungen und der zeitlichen Differentialquotienten

$$\frac{\overline{dU}}{dt}, \frac{\overline{dV}}{dt}, \frac{\overline{dW}}{dt}$$

berücksichtigen. Für ψ, U, V, W bleiben auch in zweiter Annäherung die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\psi &= -\theta_1, \\ \Delta U &= -\frac{1}{c}u_0\theta_1, \ldots, \\ u_2 &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

maßgebend, dagegen haben wir in u_1, v_1, w_1 nicht mehr, wie in erster Annäherung, die Ableitungen des elektrostatischen Potentials ψ zu erblicken, sondern wir haben die vollen Formeln:

$$u_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{1}{c}\Big\{\frac{\overline{dU}}{dt} + \frac{\partial u_0}{\partial x}U + \frac{\partial v_0}{\partial x}V + \frac{\partial w_0}{\partial x}W\Big\}, .. \qquad (5)$$

anzusetzen.

Da aus den Formeln (1) hervorgeht, daß die Ausdrücke rechts in (1) für positive und negative Elektronen dieselben sind, mit Ausnahme der Ausdrücke

$$\frac{1}{2}\mu_0 \int_\tau u_1\theta_1 d\tau, ..,$$

die für positive bzw. negative Elektronen von entgegengesetztem Vorzeichen sind, ergeben sich die elektromotorischen Kräfte, welche auf ein den Raum $\overline{d\tau}$ einnehmendes elektrisches Teilchen in einem neutral elektrischen Leiter ausgeübt werden:

$$\Xi = -\frac{1}{2}\mu_0\theta_1\overline{d\tau}\Big[\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{c}\Big\{\frac{\overline{dU}}{dt} + \frac{\partial u_0}{\partial x}U + \frac{\partial v_0}{\partial x}V + \frac{\partial w_0}{\partial x}W\Big\}\Big], .. \qquad (6)$$

Die von dem elektrostatischen Potentiale ψ herrührenden elektromotorischen Kräfte werden in langsam veränderlichen Feldern in den meisten Fällen deshalb weniger Interesse beanspruchen, weil in neutral elektrischen Leitern, wie sich bei einer späteren Gelegenheit herausstellen wird, die von diesen elektromotorischen Kräften hervorgerufenen Strömungen rasch zu einem stationären Zustande führen, in welchem die Strömungen verschwinden; das wesentliche Interesse in neutral elektrischen Körpern beanspruchen die elektromotorischen Kräfte

$$-\frac{1}{2c}\mu_0\theta_1\overline{d\tau}\Big\{\frac{\overline{dU}}{dt} + \frac{\partial u_0}{\partial x}U + \frac{\partial v_0}{\partial x}V + \frac{\partial w_0}{\partial x}W\Big\}, ..,$$

welche entstehen, wenn elektrische Ströme ihre

1) Vgl. Abh. IV u. V, diese Zeitschr. **18**, 542 u. 581, 1917.
2) Vgl. Abh. III, diese Zeitschr. **18**, 506, 1917.

Intensitäten zeitlich ändern bzw. die Körper, in denen elektrische Strömungen stattfinden, sich bewegen.

Denken wir uns, um sogleich den prinzipiellen Fall herauszugreifen, auf den die übrigen Fälle zurückzuführen sind, einen elektrischen Stromring (J, σ), der im allgemeinen in einer sichtbaren Bewegung begriffen sein möge, so daß jedes Element $d\sigma$ desselben mit den Richtungskosinussen

$$\cos(\sigma x),\quad \cos(\sigma y),\quad \cos(\sigma z)$$

an der Stelle (ξ, η, ζ) gewisse sichtbare Geschwindigkeitskomponenten besitzt, und wir wollen die elektromotorischen Kräfte berechnen, welche das von diesem Stromringe herrührende elektromagnetische Feld auf ein den Raum $\overline{d\tau}$ erfüllendes elektrisches Teilchen in einem elektrisch neutralen Leiter ausübt, wobei wir die Koordinaten irgendeines Punktes des elektrischen Teilchens mit (x, y, z), seine sichtbaren Geschwindigkeiten mit u_0, v_0, w_0 bezeichnen wollen.

Wir haben zu bedenken, daß sich U, V, W additiv aus den Größen zusammensetzen, welche den einzelnen Strömen entsprechen, und wenn wir nur die Wirkungen des Stromringes (J, σ) berechnen wollen, nur die von diesen herrührenden[1])

$$U = \frac{1}{4\pi c}\int \frac{u_x}{r}\, d\tau = \frac{J}{4\pi c}\sqrt{\frac{2}{\mu_0}}\int_\sigma \frac{\cos(\sigma x)}{r}\, d\sigma, \ldots \tag{I}$$

zu betrachten haben; in einem scheinbar starren Leiter ist überdies:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0,$$

und

$$\frac{\partial w_0}{\partial y} = -\frac{\partial v_0}{\partial z} = \pi',$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} = \chi',$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{\partial u_0}{\partial y} = \varrho'$$

sind bestimmte Konstanten. Die gesuchten elektromotorischen Kräfte sind somit:

$$\Xi = -\frac{1}{2}\mu_0 \theta_1 \overline{d\tau}\cdot\frac{1}{4\pi c^2}\cdot\sqrt{\frac{2}{\mu_0}}$$
$$\left\{\frac{d}{dt}\int_\sigma J\frac{\cos(\sigma x)}{r}d\sigma + \int_\sigma J\frac{\varrho'\cos(\sigma y) - \chi'\cos(\sigma z)}{r}d\sigma\right\}, \ldots,$$

und wenn wir noch für θ_1 die elektrische Masse

$$e = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}}\,\theta_1\,\overline{d\tau}$$

einführen[1]), welche sich in $\overline{d\tau}$ vorfindet, so ergibt sich, daß die von dem Stromringe (J, σ) auf die elektrische Masse e in einem neutral elektrischen, scheinbar starren Körper ausgeübten elektromotorischen Kräfte die Werte haben:

$$\Xi = -\frac{e}{4\pi c^2}\left\{\frac{d}{dt}\int_\sigma J\frac{\cos(\sigma x)}{r}d\sigma + \int_\sigma J\frac{\varrho'\cos(\sigma y) - \chi'\cos(\sigma z)}{r}d\sigma\right\}, \ldots \tag{II}$$

Dies ist das Hauptresultat dieser Abhandlung; dasselbe wird später dazu dienen, die Grundgesetze der Induktion in langsam veränderlichen Feldern abzuleiten, sobald wir, unter Berücksichtigung der Erscheinungen der Reibung auf mechanischer Grundlage, imstande sind, zu untersuchen, in welcher Weise die elektrischen Strömungen den hier berechneten elektromotorischen Kräften folgen. Wie in der Lorentzschen Theorie werden infolge der Reibung in erster Annäherung die Stromkomponenten den elektromotorischen Kräften proportional werden, doch sei dieses Resultat, das wir erst mechanisch begründen müssen, an dieser Stelle nur angedeutet, damit die gewonnenen Formeln bereits auf die zu erwartenden Induktionsgesetze hinweisen können.

So wird nunmehr, da wir zur mechanischen Begründung der Reibungserscheinungen der Theorie der universellen Schwingungen bedürfen werden, eine kurze Auseinandersetzung dieser Theorie notwendig sein; wir werden diese Theorie, zu der wir in der nächsten Abhandlung übergehen werden, auch noch zu einer zweiten wichtigen Anwendung in den mechanischen Theorien des elektromagnetischen Feldes gebrauchen, nämlich zu einer mechanischen Interpretation der Magnete.

Bezüglich der Natur der Magnete stelle ich mich vollständig auf den Ampèreschen Standpunkt, indem ich magnetische Teilchen als kleine Stromringe auffasse; rein formal unterscheiden sich die Wirkungen solcher kleiner Stromringe nach außen nicht von den Wirkungen oszillierender Teilchen, d. h. starrer Teilchen, deren Zentren in einer Geraden Schwingungen um eine Mittellage mit der Schwingungsdauer T ausführen, wenn die Phase der Geschwindigkeit mit der Phase der von elektrischen Strömen aus-

1) Vgl. Abh. V, diese Zeitschr. 18, 581, 1917.

1) Vgl. Abh. IV, diese Zeitschr. 18, 542, 1917.

gehenden Geschwindigkeiten übereinstimmt und die Oszillationsrichtung in die Normale der Ebene der Führungskurve des Stromringes fällt.

Die Annahme der Ampèreschen Auffassung setzt uns ohne weiteres in den Stand, alle Grundgesetze über die ponderomotorischen Wechselwirkungen zwischen elektrischen Strömen und magnetischen Teilchen, sowie über die elektromotorischen Kräfte, welche durch bewegte magnetische Teilchen ausgeübt werden, abzuleiten, man kann auch hier bereits den Weg vorgezeichnet erkennen, auf dem die Theorie des induzierten Magnetismus ohne Schwierigkeit möglich ist; wir wollen indessen in dieser Abhandlung noch nicht auf die quantitativen Verhältnisse eingehen, wir wollen hier vielmehr einer prinzipiellen, die mechanische Natur der Magnete betreffenden Frage näher treten: Während im allgemeinen elektrische Strömungen mit Reibungserscheinungen verbunden sind, so daß elektrische Strömungen, wenn sie nicht durch fortdauernde Zuführung von Energie erhalten werden, rasch sich selbst verzehren, ist dies für elektrische Ströme, welche die magnetischen Teilchen bilden, nicht der Fall; jedenfalls kennen wir sogenannte permanente Magnete, welche — wenn überhaupt — ihre Energie sehr langsam abgeben. Meine Auffassung ist nun die, daß die Schwingungen, welche den permanenten magnetischen Teilchen inhärent sind, ihre Entstehung den Pulsationen der allgemeinen Gravitation verdanken. Auf diese Pulsationen der allgemeinen Gravitation können wir auch erst später bei Gelegenheit der Theorie der universellen Schwingungen eingehen, doch hier schon vorausnehmen, daß die Pulsationsgeschwindigkeiten der ponderablen Teilchen, welche die allgemeine Gravitation zur Folge haben, die Schwingungsdauer und Phase der

$$u_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi\,, \quad v_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi\,, \quad w_2 \sin \frac{t}{T} 2\pi$$

besitzen sollen. Wenn solche Teilchen außer diesen Pulsationen noch rasche Rotationen ausführen, so werden z. B. die Elemente ihrer Oberfläche außer konstanten noch schwingende Umlaufsgeschwindigkeiten haben, mit der Phase der

$$u_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi\,, \quad v_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi\,, \quad w_1 \cos \frac{t}{T} 2\pi;$$

jedes Elektron, welches mit einem ponderablen Teilchen verbunden ist — die mechanische Natur dieser Bindung soll noch nicht Gegenstand dieser Betrachtungen sein, — erhält somit elektromotorische Kräfte, welche das Elektron in Umlauf um die Rotationsachse des ponderablen Teilchens setzen, positive Elektronen in der einen, negative in der anderen Umlaufsrichtung, d. h. die Rotationen der ponderablen Teilchen machen die mit ihnen verbundenen Elektronen zu magnetischen Teilchen.

Sowohl für die Grundlegung der Theorie der permanenten magnetischen Teilchen, als auch für die Theorie der Reibung brauchen wir, wie wir sehen, die Theorie der universellen Schwingungen, welche wir von der nächsten Abhandlung an in den Bereich unserer Untersuchungen ziehen werden.

(Eingegangen 2. November 1917.)

Zur Kenntnis des *Ni*-Spektrums.

Von J. E. Paulson.

In meiner Dissertation habe ich schon die Ergebnisse einer vorläufigen Untersuchung des *Ni*-Spektrums mitgeteilt. Unter 51 untersuchten starken Linien erwiesen sich 14 als gesetzmäßig gelagert. Ich habe jetzt eine noch eingehendere Untersuchung aller Linien des Spektrums vorgenommen. Wie zu erwarten war, kommt auch hier eine sich mehrmals wiederholende Gruppe von Linien vor, die — wie bekannt — dadurch gekennzeichnet wird, daß zwischen den Wellenzahlen der Linien stets dieselben konstanten Differenzen auftreten. Das von mir entdeckte Wellenzahlensystem enthält acht Linien in jeder Gruppe, von welcher 33 Wiederholungen gefunden worden sind. Da eine vollständige Durchrechnung eines so linienreichen Spektrums kaum ausführbar ist, scheint es wohl möglich, daß das System größeren Umfang besitzt. Alle Paare mit den im System vorkommenden Differenzen habe ich weggelassen und von Tripletten sind nur zwei aufgenommen, deren starke Intensitäten ihre Zusammengehörigkeit sichern.

Aus den folgenden Tabellen geht sofort hervor, daß wie immer die gesetzmäßig gelagerten Linien am zahlreichsten im kurzwelligen Bereich des Spektrums vorkommen. Es muß bemerkt werden, daß die meisten starken Linien des Spektrums im System einbezogen sind. Von 4715 an (wo die Messung von Exner und Haschek beginnt) gibt es nur eine Linie mit der Intensität 20, zwei mit der Intensität 15, drei mit der Intensität 10 und fünf mit der Intensität 5, die man nicht in den Tabellen wiederfindet, welche doch 57 Linien mit Intensitäten gleich oder größer als 5 aufnehmen.

Meine Untersuchung hat nur die im Bogen-

spektrum auftretenden Linien umfaßt, deren Wellenlängen den Tabellen in Kaysers Handbuch entnommen sind. Genaue Messungen verschiedener Bereiche des Spektrums liegen von Rowland (in Sonne), Stütting, Eder und Valenta, Hasselberg und Exner und Haschek vor. Leider stimmen die Angaben verschiedener Beobachter in vielen Fällen schlecht überein. Wo die Messungsergebnisse sehr weit differieren, habe ich das Mittel genommen; wo mindestens zwei Beobachter nahezu denselben Wert gefunden haben, wurde der am genauesten erscheinende von diesen benutzt. Stütting mißt den roten Teil des Spektrums in internationalen Einheiten. Seine Zahlen habe ich in Rowlandschen Einheiten umgerechnet mit Hilfe der von Kayser berechneten Korrektionsgrößen. Die Intensitätsangaben rühren teils von Stütting (6643—6007), teils von Hasselberg (5847—4786) und teils von Exner und Haschek (4520—3253) her.

In Tabelle I bedeutet λ die Wellenlänge, J die Intensität und γ die Wellenzahl. A, B, C usw. mit den Indizes 1—33 gibt den Platz jeder Linie im System an. Tabelle II zeigt wie dieses System gebaut ist.

Tabelle I.

λ	J	γ		λ	J	γ		λ	J	γ		λ	J	γ	
6643,88	10*u*	15051,45	A_1	3576,08	1	27963,58	D_8	3320,41	8	30116,76	E_{14}	2992,71	6	33414,53	G_{22}
6327,83	6	15803,20	A_4	3572,02	10	27995,36	E_4	3315,81	10	30158,54	F_{14}	2984,28	4	33508,92	H_{20}
6256,60	10*u*	15983,12	A_7	3566,51	20	28038,61	B_{15}	3312,49	3	30188,77	B_{21}	2981,80	8	33536,79	F_{25}
6191,39	10	16151,47	A_8	3551,71	3	28155,45	E_5	3320,35	2	30208,28	$B_{22}D_{18}$	2944,06	6	33966,70	G_{23}
6129,18	6	16315,39	A_9	3548,32	6	28182,35	D_{10}	3293,83	1	30359,79	E_{16}	2914,12	2	34315,67	E_{25}
6108,35	8*u*	16371,03	A_{10}	3528,13	4	28343,63	E_8	3287,08	4	30422,14	G_{12}	2907,58	3	34392,87	C_{26}
6007,73	5	16645,78	A_{11}	3524,68	50	28371,36	G_1	3282,83	3	30461,52	E_{17}	2865,61	2	34896,59	D_{26}
5847,26	2	17102,03	A_{12}	3523,61	3	28379,99	G_2	3271,25	4	30569,35	F_{15}	2834,66	2	35277,61	E_{26}
5709,80	7	17513,75	A_{14}	3523,23	1	28383,05	B_{17}	3269,08	1	30589,64	E_{18}	2821,42	4	35443,15	G_{25}
5578,97	5	17924,46	A_{15}	3519,90	4	28409,90	C_{12}	3250,90	5	30760,71	B_{23}	2805,20	2	35648,08	H_{25}
5504,50	3	18166,95	A_{16}	3515,21	30	28447,80	F_4	3248,57	4	30782,77	G_{13}	2798,78	3	35729,86	F_{26}
5436,07	5	18395,65	A_{18}	3514,13	5	28456,55	D_{11}	3245,47	1	30812,17	F_{16}	2746,85	3	36405,33	G_{26}
5103,13	4	19595,82	A_{19}	3507,85	4	28507,49	E_9	3243,20	8	30833,74	G_{14}	2547,51	1	39254,02	B_{27}
5003,92	2	19984,33	A_{20}	3501,02	6	28563,11	E_{10}	3235,86	1	30903,68	C_{19}	2540,14	1	39367,91	B_{28}
4976,53	2	20094,32	A_{22}	3499,37	1	28576,57	H_1	3234,76	5	30914,19	F_{17}	2528,14	1	39554,78	B_{29}
4843,27	2	20647,21	A_{23}	3494,84	1	28613,61	F_6	3227,12	4	39987,38	H_{13}	2484,16	1	40255,06	B_{30}
4786,45	2	20892,31	A_{24}	3493,11	30	28627,79	F_7	3225,18	6	31006,02	B_{24}	2472,32	1	40447,84	C_{27}
4520,16	1	22123,11	A_{25}	3472,71	10	28795,96	F_8	3221,80	5	31038,55	H_{14}	2465,40	1	40561,37	C_{28}
4331,83	3	23084,93	A_{26}	3467,77	2	28836,98	C_{11}	3221,43	3	31042,30	F_{18}	2454,11	1	40747,97	C_{29}
3973,71	4	25165,40	B_1	3461,80	20	28886,71	G_3	3200,58	3	31244,34	G_{15}	2450,57	1	40806,84	B_{31}
3858,51	20	25916,74	B_4	3785,60	20	28913,43	D_{12}	3195,70	3	31292,05	C_{20}	2441,90	1	40951,72	D_{27}
3834,00	1	26082,42	B_6	3453,04	10	28959,98	F_9	3184,50	1	31402,10	C_{22}	2434,53	1	41075,69	B_{32}
3831,87	5	26096,92	B_7	3446,40	30	29015,78	F_{10}	3165,64	1	31589,19	G_{17}	2424,16	1	41251,40	D_{29}
3807,30	8	26265,33	B_8	3437,45	8	29091,33	H_3	3145,83	3	31788,12	E_{19}	2412,80	1	41445,62	E_{28}
3793,75	3	26359,14	C_1	3433,72	15	29122,93	G_4	3145,23	1	31794,18	H_{17}	2401,95	1	41632,84	E_{29}
3792,48	2	26367,97	C_2	3420,88	2	29232,24	C_{15}	3134,22	30	31905,87	D_{22}	2393,20	1	41785,06	F_{27}
3783,67	8	26429,37	B_9	3414,91	30*R*	29283,34	G_5	3132,68	1	31921,55	H_{18}	2386,70	1	41898,86	F_{28}
3775,75	8	26484,81	B_{10}	3414,08	4	29290,47	F_{11}	3129,42	3	31954,81	C_{23}	2380,94	1	42000,22	C_{31}
3736,96	4	26759,72	B_{11}	3413,61	5	29294,50	E_{12}	3107,83	2	32176,79	E_{20}	2376,12	1	42085,42	F_{29}
3722,64	5	26862,66	D_1	3409,70	5	29328,09	H_4	3105,60	5	32199,90	C_{24}	2365,78	1	42269,36	C_{32}
3688,59	3	27110,63	C_4	3393,10	20*R*	29471,57	G_8	3102,00	10*R*	32237,27	B_{25}	2362,19	1	42333,60	E_{30}
3674,30	6	27216,07	B_{12}	3391,20	10	29488,09	H_5	3101,68	10*R*	32240,59	F_{19}	2360,75	1	42359,42	C_{33}
3670,60	4	27243,50	E_1	3381,01	3	29576,96	C_{17}	3099,22	4	32266,18	E_{21}	2355,15	1	42460,14	G_{27}
3669,40	3	27252,41	E_2	3374,36	4	29635,25	G_9	3097,27	5	32286,50	E_{22}	2348,83	1	42574,39	G_{28}
3666,16	1	27276,50	C_6	3372,14	6	29654,76	E_{13}	3080,91	5	32457,94	D_{23}	2338,6	1	42760,63	G_{29}
3664,27	4	27290,57	C_7	3369,71	15*R*	29676,14	H_8	3064,75	6	32629,09	F_{20}	2337,95	1	42772,51	D_{32}
3641,78	1	27459,10	C_8	3368,03	3	29690,95	G_{10}	3057,76	15*R*	32703,68	D_{24}	2337,20	1	42786,24	F_{30}
3619,52	50*R*	27627,98	B_{14}	3366,32	5	29706,03	E_{14}	3056,33	1	32718,98	F_{21}	2331,83	1	42884,77	E_{31}
3612,96	6	27678,60	C_{10}	3365,91	5	29709,65	B_{19}	3054,42	10	32739,44	F_{22}	2312,50	3*R*	43243,24	E_{33}
3610,61	10	27696,15	F_1	3362,97	2	29735,62	D_{15}	3045,15	4	32830,10	E_{23}	2307,45	1	43337,88	F_{31}
3609,48	5	27704,82	F_2	3361,73	6	29746,58	F_{12}	3038,04	15*R*	32915,96	G_{19}	2300,90	1	43461,25	G_{30}
3602,41	5	27759,19	E_3	3337,15	1	29965,69	G_{11}	3012,14	15*R*	33198,99	B_{26}	2293,25	1	43606,24	F_{32}
3599,66	1	27780,40	D_6	3335,72	1	29978,54	D_{16}	3003,76	10*R*	33291,60	F_{24}	2290,12	1	43665,84	H_{30}
3597,86	10	27794,30	D_7	3322,46	8	30098,17	B_{20}	3002,58	15*R*	33304,69	G_{20}	2288,54	1	43695,98	F_{33}
3577,36	1	27953,57	C_{11}	3321,36	1	30108,14	F_{13}	2994,58	8	33393,66	G_{21}	2253,75	1	44370,49	G_{33}

Tabelle II.

	J	*A*	$\Delta_1 =$ 10113,92	*J*	*B*	$\Delta_2 =$ 1193,77	*J*	*C*	$\Delta_3 =$ 503,55	*J*	*Δ*	$\Delta_4 =$ 380,93	*J*	*E*	$\Delta_5 =$ 452,65	*J*	*F*	$\Delta_6 =$ 675,17	*J*	*G*	$\Delta_7 =$ 204,77	*J*	*H*
1	10*u*	15051,45	10113,95	4	25165,40	1193,74	3	26359,14	503,52	5	26862,66	380,84	4	27243,50	452,65	10	27696,15	675,21	50	28371,36	205,21	1	28576,57
2							2	26367,97				884,44	3	27252,41	452,41	5	27704,82	675,17	3	28379,99			
3													5	27759,19				1127,52	20	28886,71	204,62	8	29091,33
4	6	15803,20	10113,54	20	25916,74	1193,89	3	27110,63				884,73	10	27965,36	452,44	30	28447,80	675,13	15	29122,93	205,16	5	29328,09
5													3	28155,45				1127,89	30*R*	29283,34	204,75	10	29488,09
6				1	26082,42	1194,08	1	27276,50	503,00	1	27780,40				833,21	1	28613,61						
7	10	15983,12	10113,88	5	26096,92	1193,65	4	27290,57	503,73	10	27794,30				833,49	30	28627,79						
8	10	16151,47	10113,86	8	26265,33	1193,77	1	27459,10	504,48	1	27963,58	380,05	4	28343,63	452,33	10*R*	28795,96	675,61	20*R*	29471,57	204,57	15*R*	29676,14
9	6	16515,39	10113,98	8	26429,37							2078,12	4	28507,49	452,49	10	28959,98	675,27	4	29635,25			
10	8*u*	16371,03	10113,78	8	26484,81	1193,79	6	27678,60	503,75	6	28182,35	380,76	6	28563,11	452,67	30	29015,78	675,17	3	29690,95			
11	5	16645,78	10113,94	4	26759,72	1193,85	1	27953,57	502,98	5	28456,55	380,43	2	28836,98	453,49	4	29290,47	675,22	1	29965,69			
12	2	17102,03	10114,04	6	27216,07	1193,83	4	28409,90	503,53	20	28913,43	381,07	5	29294,50	452,08	6	29746,58	675,56	4	30422,14			
13													6	29754,76	453,38	1	30108,14	674,63	4	30782,77	204,61	4	30987,38
14	7	17513,75	10114,23	50*R*	27627,98							2078,05	5	29706,03	452,51	10	30158,54	675,20	8	30833,74	204,81	5	31038,55
15	5	17924,46	10114,15	20	28038,61	1193,63	2	29232,24	503,38	2	29735,62	381,14	8	30116,76	452,59	4	30569,35	674,99	3	31244,34			
16	3	18166,95							11812,59	1	29978,54	381,25	1	30359,79	452,38	1	30812,17						
17				1	28383,05	1193,91	3	29576,96				884,56	3	30461,52	452,67	5	30914,19	675,00	1	31589,19	204,99	1	31794,18
18	5	18395,64							11812,64	2	30208,28	381,36	1	30589,64	452,66	3	31042,30				879,25	1	31921,55
19	4	19595,82	10113,83	5	29709,65	1194,03	1	30903,68				884,41	3	31788,12	452,47	10*R*	32240,59	675,37	15*R*	32915,96			
20	2	19984,33	10113,84	8	30098,17	1193,88	3	31292,05				884,74	2	32176,79	452,30	6	32629,09	675,60	15*R*	33304,69	204,23	4	33508,92
21				3	30188,77							2077,41	4	32266,18	452,80	1	32718,98	674,68	8	33393,66			
22	2	20094,32	10113,96	2	30208,28	1193,82	1	31402,10	503,77	30	31905,87	380,63	5	32286,50	452,94	10	32739,14	675,09	6	33414,53			
23	2	20647,21	10113,50	5	30760,71	1194,10	3	31954,81	503,13	5	32457,94	381,16	4	32839,10	452,50	10*R*	33291,60	675,10	6	33966,70			
24	2	20892,31	10113,91	5	31006,02	1193,88	5	32199,90	503,78	15	32703,68				833,11	8	33536,79						
25	1	22123,11	10114,16	10*R*	32237,27							2078,40	2	34315,67				1127,48	4	35443,15	204,93	2	35648,08
26	3	23084,93	10114,06	15*R*	33198,99	1193,90	3	34392,87	503,72	2	34896,59	381,02	2	35277,61	452,25	3	35729,86	675,47	3	36405,32			
27				1	39254,02	1193,82	1	40447,84	503,88	1	40951,72				833,34	1	41785,06	675,08	1	42460,14			
28				1	39367,91	1193,46	1	40561,37				884,25	1	41455,62	453,24	1	41898,86	675,53	1	42574,39			
29				1	39554,78	1193,19	1	40747,97	503,43	1	41251,40	381,44	1	41632,84	452,58	1	42085,42	675,21	1	42760,63			
30				1	40256,06							2078,54	1	42333,60	452,64	1	42786,24	675,01	1	43461,25	204,59	1	43665,84
31				1	40806,84	1193,38	1	42000,22				884,55	1	42884,77	453,11	1	43337,88						
32				1	41075,69	1193,62	1	42269,36	503,15	1	42772,51				833,73	1	43606,24						
33							1	42359,42				883,82	3*R*	43243,24	452,74	1	43695,98	674,51	1	44370,49			

Uddevalla (Schweden), 3. November 1917.

(Eingegangen 6. November 1917.)

BESPRECHUNGEN.

A. E. Haas, Die Grundgleichungen der Mechanik, dargestellt auf Grund der geschichtlichen Entwicklung. gr. 8°. VI u. 216 S. mit 45 Abbildungen. Leipzig, Veit & Comp. 1914. Geh. M. 7.50, geb. M. 9.—.

Das Buch gibt, wie auch schon in der Einteilung in zwanzig ziemlich gleich große Abschnitte zum Ausdruck kommt, Vorlesungen wieder, die der Verfasser an der Universität Leipzig gehalten hat. Es ist als Einführung in die theoretische Mechanik für den Anfänger gedacht und darum in seinen Voraussetzungen sorgfältig beschränkt. Neben den elementarmathematischen Kenntnissen werden eigentlich nur die einfachsten Regeln der Differential- und Integralrechnung als bekannt angenommen. Das Ziel des Buches ist, die Schwierigkeiten, die sich jedem ersten Eindringen in das Lehrgebäude der Prinzipien der Mechanik entgegenstellen, dadurch zu beheben, daß es den Leser von den primitivsten Anfängen der Mechanik auf dem historischen Wege Schritt für Schritt bis zu den komplizierteren Teilen führt, ohne dabei eigentlich Geschichte treiben zu wollen, lediglich aus pädagogischen Gründen. Man muß diesen Gedanken als außerordentlich glücklich bezeichnen, und er ist mit einer mustergültigen Sorgfalt durchgeführt, die die Lektüre des Buches auch dem zu einem hohen Genuß macht, der es nicht als Lernender liest.

Die ersten Abschnitte sind ganz elementar gehalten und behandeln die Hebelgesetze, das Kräfteparallelogramm, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, sowie die Galilei-Newtonsche Begründung der Dynamik. Dann folgen, indem mehr und mehr analytische Methoden zu Hilfe genommen werden, die Differentialgleichungen der Bewegung des materiellen Punktes, der Zusammenhang der Planetenbewegung mit dem Gravitationsgesetz und die drei Integrationsprinzipien: der Schwerpunkt-, Flächen- und Energiesatz; weiterhin der Begriff des Potentials, ferner das d'Alembertsche Prinzip mit den Lagrangeschen Multiplikatoren, sowie die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art, die in ebenso durchsichtiger Weise entwickelt werden, wie schließlich das Prinzip der kleinsten Aktion und die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen.

Daß der Umfang der Vorlesungen das Einstreuen weiterer Beispiele offenbar verbot, möchte man namentlich bei den letzten, für den Anfänger nicht ganz leichten Abschnitten etwas bedauern. Ein biographisches Namenverzeichnis bildet den Schluß des schönen, klaren und ansprechend geschriebenen Buches, das man ganz besonders jedem Physiker ohne Einschränkung empfehlen darf: er findet darin die Grundlagen entwickelt für zahlreiche Gebiete der theoretischen Physik, z. B. der kinetischen Theorie der Materie, überhaupt aller Probleme, in denen das Hamiltonsche Prinzip von Bedeutung ist. R. Grammel.

Tagesereignisse.

Am 1. Oktober 1917 ist das

Kaiser-Wilhelm-Institut für physikal. Forschung

ins Leben getreten. Seine Aufgabe soll darin bestehen, die planmäßige Bearbeitung wichtiger und dringlicher physikalischer Probleme durch Gewinnung und materielle Unterstützung besonders geeigneter Forscher zu veranlassen und zu fördern.

Die Auswahl der Probleme, der Methoden sowie des Arbeitsplatzes liegt in der Hand des unterzeichneten Direktoriums. Doch sollen auch von anderen Physikern an das Direktorium gelangende Anregungen von diesem erwogen und die vorgeschlagenen Untersuchungen im Falle der Bewilligung gefördert werden.

Wenn das Institut auch naturgemäß erst nach Beendigung des Krieges seine volle Wirksamkeit wird entfalten können, so soll doch womöglich schon jetzt mit der Arbeit begonnen werden. Anfragen über nähere Einzelheiten sind an den mitunterzeichneten Vorsitzenden des Direktoriums, Professor Einstein (Haberlandstr. 5, Berlin-Schöneberg) zu richten.

Das Direktorium.
Einstein. Haber. Nernst. Rubens. Warburg.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Gustav Hertz für Physik.

Ernannt: Die a. o. Professoren an der Technischen Hochschule Lemberg Dr. Kaspar Weigel (Meßkunst) und Dr. Kasimir Bartel (Darstellende Geometrie) zu ord. Professoren an der Technischen Hochschule.

Angebote.

Physiker.

Wir suchen für unser Laboratorium mehrere **Physiker.** Herren mit Erfahrung auf dem Gebiet der Gasentladungen oder des Hochvakuums bevorzugt. Angaben über Lebenslauf, Militärverhältnis, Eintrittstermin, Gehaltsansprüche unter Beifügung von Zeugnisabschriften an

AEG

Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft, Glühlampenfabrik,
Berlin NW. 87, Sickingenstr. 71.

Für das **Physikalische Institut der Technischen Hochschule Berlin** wird als **Assistent** ein

Physiker

mit abgeschlossener Hochschulbildung gesucht. Einsendung von Gesuchen nebst Lebenslauf und Zeugnisabschriften erbeten an

Geh. Regierungsrat Prof. Dr. **L. Grunmach,**
Charlottenburg, Berlinerstraße 171.

Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

[illegible]